حسابان

۱ گزینه ۱

نکته: برای حل یک معادلهٔ گویا ابتدا با مخرج‌مشترک‌گیری، عبارت را ساده‌تر می‌کنیم و سپس معادلهٔ حاصل را حل می‌نماییم. در پایان قابل‌قبول بودن جواب‌های به‌دست‌آمده را بررسی می‌کنیم.
ابتدا با شرط $x \geq ۰$، طرف چپ معادله را ساده می‌کنیم:

$$\frac{۱}{۵+\sqrt{x}}+\frac{۱}{۵-\sqrt{x}}=\frac{۵-\sqrt{x}+۵+\sqrt{x}}{(۵+\sqrt{x})(۵-\sqrt{x})}=\frac{۱۰}{۲۵-x}$$

با جایگذاری این مقدار در معادله داریم:

$$\frac{۱۰}{۲۵-x}=\frac{۱۰}{x^۲+۵}\Rightarrow ۲۵-x=x^۲+۵\Rightarrow x^۲+x-۲۰=۰$$
$$\Rightarrow (x-۴)(x+۵)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۴ \\ x=-۵ \quad \text{غ.ق.} \end{cases}$$

$x=-۵$ در معادلهٔ اصلی صدق نمی‌کند، پس فقط $x=۴$ قابل‌قبول است؛ بنابراین معادلهٔ موردنظر فقط یک ریشه دارد.

۲ گزینه ۲

برای حل معادلهٔ داده‌شده از تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$x^۲+۴x+۳=t$$

حالا معادلهٔ جدید برحسب t به صورت زیر درمی آید:

$$x^۲+۴x+۳=\sqrt{x^۲+۴x+۳+۲}\Rightarrow t=\sqrt{t+۲}$$

با حل معادلهٔ به دست آمده مقدار t و در ادامه حاصل ضرب ریشه های معادلهٔ اصلی را محاسبه می کنیم.

$$t=\sqrt{t+۲}\xrightarrow{\text{به توان ۲}}t^۲=t+۲\Rightarrow t^۲-t-۲=۰\Rightarrow (t-۲)(t+۱)=۰\Rightarrow \begin{cases} t-۲=۰\Rightarrow t=۲ \\ t+۱=۰\Rightarrow t=-۱ \end{cases}$$

اکنون معادلهٔ اصلی را حل می کنیم:

$$t=۲\Rightarrow x^۲+۴x+۳=۲\Rightarrow x^۲+۴x+۱=۰\Rightarrow x_۱x_۲=۱$$

$t=-۱$ غیرقابل‌قبول است. چون حاصل رادیکال با فرجهٔ زوج نباید منفی باشد.

۳ گزینه ۱

$$\sqrt{\left(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right)^2}=\left|\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\right|$$

باتوجه‌به $D=[-1,1]$ و اینکه ریشهٔ داخل قدر مطلق $x=0$ است داریم:

$$1)\quad -1\le x\le 0\ :\ \sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}=-1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\ \Rightarrow\ \sqrt{1+x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{3}{4}$$

$$2)\quad 0\le x\le 1\ :\ \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}=-1+\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}\ \Rightarrow\ \sqrt{1-x}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3}{4}$$

پس مجموع ریشه‌ها صفر است.

روش دوم: چون معادله زوج است پس مجموع ریشه‌ها برابر صفر می‌شود.

۴ گزینه ۲

ابتدا مقدار $x=2$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$x=2\xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جایگذاری}}\frac{1}{6}+\frac{1-2m}{6}=\frac{4}{-3}\Rightarrow\frac{2-2m}{6}=\frac{-4}{3}\Rightarrow\frac{1-m}{3}=\frac{-4}{3}\Rightarrow 1-m=-4\Rightarrow m=5$$

مقدار $m=5$ را در معادله قرار می‌دهیم و آن را حل می‌کنیم:

$$\frac{1}{x^2+x}+\frac{1-5x}{x^3-x}-\frac{x^2}{1-x^2}=0\Rightarrow\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1-5x}{x(x-1)(x+1)}-\frac{x^2}{(1-x)(x+1)}=0$$

$$\Rightarrow\frac{x-1+1-5x+x^3}{x(x+1)(x-1)}=0\Rightarrow\frac{x^3-4x}{x(x+1)(x-1)}=0\Rightarrow x^3-4x=0$$

$$\Rightarrow x(x^2-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0 & \text{غ ق ق}\\ x=2\\ x=-2\end{cases}$$

دقت داریم که $x=0$ در دامنهٔ معادله وجود ندارد بنابراین قابل قبول نیست، پس معادله به‌جز $x=2$ فقط یک جواب دیگر دارد.

۵ گزینه ۴

$$(\frac{x^۲+۱}{x})(x^۲+۳+\frac{۱}{x^۲})=۲ \Rightarrow (x+\frac{۱}{x})(x^۲+\frac{۱}{x^۲}+۲+۱)=۲ \Rightarrow (x+\frac{۱}{x})\left((x+\frac{۱}{x})^۲+۱\right)=۲ \xrightarrow{x+\frac{۱}{x}=t} t(t^۲+۱)=۲$$

$$\Rightarrow t^۳+t-۲=۰$$

درنتیجه مجموع ضرایب صفر است، پس دارای عامل $(t-۱)$ است:

$$\begin{array}{l|l} t^۳+t-۲ & t-۱ \\ \hline -(t^۳-t^۲) & t^۲+t+۲ \\ t^۲+t-۲ & \\ -(t^۲-t) & \\ ۲t-۲ & \\ -(۲t-۲) & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow t^۳+t-۲=۰ \Rightarrow (t-۱)(t^۲+t+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t-۱=۰ \Rightarrow t=۱ \Rightarrow x+\frac{۱}{x}=۱ \text{ معادله جواب ندارد} \\ t^۲+t+۲=۰ \Rightarrow \Delta=۱-۸=-۷<۰ \text{ معادله جواب ندارد} \end{cases}$$

۶ گزینه ۱

مطابق فرمول‌های فیزیک می‌دانیم $\frac{\text{مسافت}}{\text{سرعت}}=\text{زمان}$. اگر زمان طی‌شده مربوط به موتورسوار ۱ را $t_۱$ و زمان طی‌شده مربوط به موتورسوار ۲ را $t_۲$ بگیریم و کل فاصلهٔ A تا B را x اسم‌گذاری کنیم، معلوم است که موتورسوار ۱ کل x را با سرعت ۱۲۰ و موتورسوار ۲، $x-۵۰$ را با سرعت ۸۰ رفته است، پس:

$$\begin{cases} t_۱=\frac{x}{۱۲۰} \\ t_۲=\frac{x-۵۰}{۸۰} \end{cases}$$

$$\text{از طرفی}: t_۲-t_۱=۱ \text{ یا } t_۲=t_۱+۱ \Rightarrow \frac{x-۵۰}{۸۰}-\frac{x}{۱۲۰}=۱ \Rightarrow \frac{۳x-۱۵۰-۲x}{۲۴۰}=۱$$

$x=۳۹۰$ و جواب گزینهٔ اول است.

۷ گزینه ۴

$$۱+\sqrt{۱+x^۲}=\sqrt{۱+x} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱+۱+x^۲+۲\sqrt{۱+x^۲}=۱+x$$

$$\Rightarrow (x^۲-x+۱)+۲\sqrt{۱+x^۲}=۰$$

عبارت $x^۲-x+۱$ همواره مثبت است $(\Delta<۰ \ , \ a>۰)$، همچنین $\sqrt{۱+x^۲}$ نیز همواره مثبت است؛ بنابراین تساوی فوق هیچگاه نمی‌تواند برقرار باشد چون مجموع دو عبارت مثبت هیچگاه صفر نمی‌شود.

۸ گزینه ۱

ابتدا باید معادلهٔ زیر را حل کنیم:

$$x+\sqrt{2x-1}=1 \Rightarrow \sqrt{2x-1}=1-x \xrightarrow[x\geq\frac{1}{2}]{1-x\geq 0} \frac{1}{2}\leq x\leq 1$$

طرفین معادلهٔ $\sqrt{2x-1}=1-x$ را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$2x-1=1-2x+x^2 \Rightarrow x^2-4x+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2+\sqrt{2}\notin[\frac{1}{2},1] \\ x=2-\sqrt{2}\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x+\sqrt{2x-1})=x^2-6 \xrightarrow{x=2-\sqrt{2}} f(1)=(2-\sqrt{2})^2-6=4+2-4\sqrt{2}-6=-4\sqrt{2}$$

۹ گزینه ۳

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-2)^2}=|\sqrt{x-1}-2|$$

$$\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=\sqrt{(\sqrt{x-1}-3)^2}=|\sqrt{x-1}-3| \Rightarrow |\sqrt{x-1}-2|+|\sqrt{x-1}-3|=1 \Rightarrow A=\sqrt{x-1}-2 \Rightarrow |A|+|$$

با حل معادلهٔ فوق، وقتی $0\leq A\leq 1$ باشد بر خط $y=1$ منطبق می‌شود، پس:

$$0\leq\sqrt{x-1}-2\leq 1 \Rightarrow 5\leq x\leq 10 \Rightarrow \text{جواب صحیح}=6$$

۱۰ گزینه ۱

از طرف چپ و راست مخرج‌مشترک می‌گیریم:

$$\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)}=ax(\frac{x+1-(x-1)}{x+1}) \Rightarrow \frac{-4x}{(x+1)(x-1)}=ax(\frac{2}{x+1}) \Rightarrow \frac{2ax}{x+1}+\frac{4x}{(x+1)(x-1)}=0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{x+1}(a+\frac{2}{x-1})=0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{2x}{x+1}=0 \Rightarrow x=0 \\ a+\frac{2}{x-1}=0 \Rightarrow \frac{2}{x-1}=-a \Rightarrow \frac{2}{-a}=x-1 \Rightarrow x=1-\frac{2}{a} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{قدر مطلق تفاضل جواب‌ها}=\left|1-\frac{2}{a}-0\right|=2 \Rightarrow a=\frac{2}{3}, a=-2$$

۱۱ گزینه ۱

$$(\frac{x}{3+x})^2=A \Rightarrow (\frac{3+x}{x})^2=\frac{1}{A}, A\not\leq 0$$

$$(\frac{x}{3+x})^2+(\frac{3+x}{x})^2=1 \Rightarrow A+\frac{1}{A}=1$$

$$\xrightarrow{\times A} A^2+1=A \Rightarrow A^2-A+1=0 \xrightarrow{\Delta<0} \text{معادله جواب ندارد}$$

بنابراین هیچ مقداری برای x وجود ندارد.

۱۲ گزینه ۳

$$\frac{۳}{\sqrt{x-۱}+۱}=۳-\sqrt{x-۱}\Rightarrow \sqrt{x-۱}+\frac{۳}{\sqrt{x-۱}+۱}=۳$$
$$\Rightarrow \sqrt{x-۱}+۱+\frac{۳}{\sqrt{x-۱}+۱}=۴$$
$$\xrightarrow[t\geq ۱]{\sqrt{x-۱}+۱=t} t+\frac{۳}{t}=۴\Rightarrow t^{۲}-۴t+۳=۰$$
$$\Rightarrow (t-۱)(t-۳)=۰$$
$$\Rightarrow \begin{cases} t=۱\Rightarrow \sqrt{x-۱}+۱=۱\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۰\Rightarrow x=۱ \\ t=۳\Rightarrow \sqrt{x-۱}+۱=۳\Rightarrow \sqrt{x-۱}=۲\Rightarrow x=۵ \end{cases}$$
$$\Rightarrow \text{مجموع جواب‌ها}: ۱+۵=۶$$

۱۳ گزینه ۳

$$x+\sqrt{x^{۲}-۲\sqrt{۳}x+۳}=\sqrt{۳}\Rightarrow x+\sqrt{(x-\sqrt{۳})^{۲}}=\sqrt{۳}$$
$$\Rightarrow \left|x-\sqrt{۳}\right|=\sqrt{۳}-x$$

می‌دانیم اگر $|u|=-u$ باشد، آنگاه $u\leq ۰$ است؛ پس:

$$x-\sqrt{۳}\leq ۰\Rightarrow x\leq \sqrt{۳}\Rightarrow x\in (-\infty,\sqrt{۳}]$$

۱۴ گزینه ۱

ابتدا طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵})^{۲}=۱$$
$$\Rightarrow x+۱+۲x-۵-۲\sqrt{(x+۱)(۲x-۵)}=۱$$
$$\Rightarrow (۳x-۵)^{۲}=\left(۲\sqrt{(x+۱)(۲x-۵)}\right)^{۲}$$
$$\Rightarrow ۹x^{۲}-۳۰x+۲۵=۸x^{۲}-۱۲x-۲۰$$
$$\Rightarrow x^{۲}-۱۸x+۴۵=۰$$
$$\Rightarrow (x-۳)(x-۱۵)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۳\Rightarrow k=۳ \\ x=۱۵ \quad \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$
$$\sqrt{x+k}=k\xrightarrow{k=۳}\sqrt{x+۳}=۳\Rightarrow x+۳=۹\Rightarrow x=۶$$

۱۵ گزینه ۳

$$\sqrt{۲x-۳}+\sqrt{۴(۲x-۳)}=x+۱\Rightarrow ۳\sqrt{۲x-۳}=x+۱$$
$$\Rightarrow ۹(۲x-۳)=x^{۲}+۲x+۱\Rightarrow x^{۲}-۱۶x+۲۸=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ x=۱۴ \end{cases}$$

هر دو جواب قابل‌قبول‌اند چون در معادله صدق می‌کنند.

۱۶ گزینه ۳

اگر آشپز غذا را در x ساعت درست کند، شاگرد آن غذا را در $x+1$ ساعت درست می‌کند؛ پس در یک ساعت، آشپز $\frac{1}{x}$ و شاگرد $\frac{1}{x+1}$ از آن غذا را درست می‌کنند؛ بنابراین اگر در یک ساعت باهم کار کنند، $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x}$ از غذا را درست می‌کنند. ازطرفی باتوجه‌به اینکه کل غذا را در $\frac{6}{5}$ ساعت (۷۲ دقیقه) درست می‌کنند، در یک ساعت $\frac{5}{6}$ غذا را درست خواهند کرد؛ بنابراین به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{6}$$

حال با ضرب دو طرف این معادله در $6x(x+1)$، آن را حل می‌کنیم:

$$6(x+1)+6x=5x(x+1)\Rightarrow 6x+6+6x=5x^2+5x\Rightarrow 5x^2-7x-6=0$$
$$\Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{49+120}}{10}=\frac{7\pm 13}{10}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=-\frac{3}{5}<0 \quad \text{غ.ق.}\end{cases}$$

بنابراین آشپز غذا را در ۲ ساعت آماده می‌کند، پس شاگرد آشپز این غذا را در ۳ ساعت آماده خواهد کرد.

۱۷ گزینه ۲

طرفین معادله را در مخرج‌مشترک کسرها $[(a-x)(x)]$ ضرب می‌کنیم.

$$x(a-x)\left[\frac{x}{a-x}-\frac{a-x}{x}-\frac{a}{x}\right]=0$$
$$\Rightarrow x^2-(a-x)^2-a(a-x)=0$$
$$\Rightarrow x^2-a^2+2ax-x^2-a^2+ax=0$$
$$\Rightarrow 3ax-2a^2=0\Rightarrow 3ax=2a^2\xrightarrow{a\neq 0}x=\frac{2}{3}a$$

۱۸ گزینه ۲

$$\text{زمان رفت}=t=\frac{x}{V}=\frac{60}{V}$$
$$\text{زمان برگشت}=t'=\frac{x}{V'}=\frac{60}{V-10}$$
$$\text{طبق فرض}: t=t'-0/5\Rightarrow\frac{60}{V}=\frac{60}{V-10}-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 2\times 60(V-10)=2\times 60V-V(V-10)$$
$$\Rightarrow V^2-10V-1200=0\Rightarrow(V-40)(V+30)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}V=40\frac{km}{h}\Rightarrow V'=V-10=40-10=30\frac{km}{h}\\ V=-30 \quad \text{غ.ق.}\end{cases}$$

۱۹ گزینه ۴

معادله را به‌صورت $\sqrt{x-1}=\sqrt{x}-\sqrt{2-x}$ می‌نویسیم و طرفین آن را به توان دو می‌رسانیم.

$$x+2-x-2\sqrt{2x-x^2}=x-1$$
$$\Rightarrow 2\sqrt{2x-x^2}=3-x$$

مجدداً طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$4(2x-x^2)=9-6x+x^2$$
$$\Rightarrow 5x^2-14x+9=0\ ,\ \Delta>0$$
$$S=-\frac{b}{a}=\frac{14}{5}$$

۲۰ گزینه ۱

$$\frac{3-x}{x+3}+\frac{x+1}{x-3}=\frac{ax+b}{x^2-9}$$
$$\Rightarrow \frac{(3-x)(x-3)+(x+1)(x+3)}{x^2-9}=\frac{ax+b}{x^2-9}$$
$$\Rightarrow -x^2+6x-9+x^2+4x+3=ax+b$$
$$\Rightarrow 10x-6=ax+b$$

اگر $a=10$ و $b=-6$ باشد، تساوی اخیر به ازای هر x حقیقی به‌جز ۳ و -3 برقرار است، یعنی معادله بی‌شمار جواب دارد. لذا:

$$a+b=10-6=4$$

۲۱ گزینه ۳

معادله را حل می‌کنیم و جواب‌های به‌دست‌آمده به شرطی موردقبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

$$x+\sqrt{2x^2-5x+2}=2\Rightarrow \sqrt{2x^2-5x+2}=2-x$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} 2x^2-5x+2=x^2-4x+4\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow \begin{cases} x=-1 & \text{ق.ق} \\ x=2 & \text{ق.ق} \end{cases}$$

هر دو جواب در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند.

۲۲ گزینه ۳

گام اول

الف) مقدار کل رنگ موجود برابر ۱۵ کیلوگرم است.

ب) باتوجه به غلظت های دادەشده، حساب می کنیم از این ۱۵ کیلوگرم چند کیلوگرم رنگ خالص است.

ج) فرض می کنیم از ۱۵ کیلوگرم رنگ موجود، x کیلوگرم بخار شود. نسبت غلظت رنگ خالص به رنگ موجود را برابر ۵۰% فرض کرده و مقدار رنگ تبخیر شده را محاسبه می کنیم.

گام دوم

$$\text{کل رنگ موجود} = ۱۵\,kg$$

$$\text{مقدار رنگ خالص موجود} = (۱۱ \times ۰/۴) + (۴ \times ۰/۷) = ۴/۴ + ۲/۸ = ۷/۲\,kg$$

$$\text{غلظت رنگ پس از تبخیر } x \text{ کیلوگرم از آن} = \frac{۷/۲}{۱۵-x} = \frac{۵۰}{۱۰۰} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۱۵ - x = ۲ \times ۷/۲ = ۱۴/۴$$

$$\Rightarrow x = ۱۵ - ۱۴/۴ = ۰/۶\,kg$$

پس ۰/۶ کیلوگرم از محلول موجود باید تبخیر شود.

۲۳ گزینه ۳

برای حل معادلهٔ مفروض اگر $x^{۲} - ۲x = A$ فرض شود خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{A-۱} - \frac{۱}{A} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۱}{A(A-۱)} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow A^{۲} - A - ۲ = ۰$$

درنتیجه $A = ۲, -۱$ که با جانشینی در رابطهٔ $x^{۲} - ۲x = A$، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم به دست می‌آیند.

$$x^{۲} - ۲x = -۱ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۰ \Rightarrow x = ۱$$

$$x^{۲} - ۲x = ۲ \Rightarrow (x-۱)^{۲} = ۳ \Rightarrow x = ۱ \pm \sqrt{۳}$$

پس ریشهٔ بزرگ‌تر $x = ۱ + \sqrt{۳}$ است.

۲۴ گزینه ۲

چون $x = ۴$ یک جواب معادله است پس در آن صدق می‌کند:

$$\frac{۴-a}{۱۶-۴-۶} - \frac{۱}{۱۶-۴} = \frac{a-۱}{۸-۴} \Rightarrow \frac{۴-a}{۶} - \frac{۱}{۱۲} = \frac{a-۱}{۴}$$

$$\xrightarrow{\times ۱۲} (۸ - ۲a) - ۱ = ۳a - ۳ \Rightarrow a = ۲$$

بنابراین معادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{x-۲}{x^{۲}-x-۶} - \frac{۱}{x^{۲}-۴} = \frac{۱}{۲x-۴}$$

$$\Rightarrow \frac{x-۲}{(x+۲)(x-۳)} - \frac{۱}{(x-۲)(x+۲)} = \frac{۱}{۲(x-۲)}$$

با ضرب طرفین معادلهٔ اخیر در ک.م.م مخرج کسرها داریم:

$$۲(x-۲)^{۲} - ۲(x-۳) = x^{۲} - x - ۶ \Rightarrow ۲x^{۲} - ۸x + ۸ - ۲x + ۶ = x^{۲} - x - ۶$$

$$\Rightarrow x^{۲} - ۹x + ۲۰ = ۰ \Rightarrow (x-۴)(x-۵) = ۰ \Rightarrow x = ۴, x = ۵$$

۲۵ گزینه ۴

$$\frac{x}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}=\frac{a}{x^2-4}\Rightarrow\frac{x(x+2)+(x+1)(x-2)}{x^2-4}=\frac{a}{x^2-4}$$

$$\xrightarrow{x\neq\pm 2} x^2+2x+x^2-x-2=a\Rightarrow 2x^2+x-2-a=0\qquad(*)$$

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله از فرمول $P=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید:

$$\frac{c}{a}=-\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{-2-a}{2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow 2+a=3\Rightarrow a=1$$

حال، مقدار a را در معادلهٔ (*) قرار داده و جواب‌های آن را می‌یابیم:

$$2x^2+x-2-a=0\xrightarrow{a=1}2x^2+x-3=0\Rightarrow\begin{cases}x_1=1\\ x_2=-\frac{3}{2}\end{cases}\Rightarrow|x_1-x_2|=\frac{5}{2}$$

۲۶ گزینه ۳

نکته: عبارت درجهٔ دوم ax^2+bx+c همواره مثبت (منفی) است، هرگاه $\Delta<0$ و $a>0$ $(a<0)$ باشد.
توجه کنید که عبارت‌های $|x|+1$ و x^2+1 همواره مثبت هستند، پس سمت چپ معادله همواره مثبت است. ازطرفی عبارت $-x^2+x-1$ همواره منفی است (زیرا $\Delta<0$ و $a<0$)، پس سمت راست معادله همواره منفی است؛ بنابراین معادله جواب ندارد.

۲۷ گزینه ۱

۲۰ کیلوگرم از محلول اولیه شکر و ۸۰ کیلوگرم آن آب است. اگر نیمی از آب را تبخیر کنیم، ۴۰ کیلوگرم آب باقی می‌ماند. اگر x کیلوگرم شکر به آن اضافه کنیم، جرم شکر $20+x$ کیلوگرم و جرم محلول $60+x$ کیلوگرم خواهد بود.

$$\frac{20+x}{60+x}=\frac{40}{100}\Rightarrow\frac{20+x}{60+x}=\frac{2}{5}\Rightarrow 100+5x=120+2x\Rightarrow 3x=20\Rightarrow x=\frac{20}{3}\ \text{کیلوگرم}$$

۲۸ گزینه ۳

ابتدا با مخرج مشترک‌گیری، عبارت را ساده می‌کنیم:

$$\frac{(x+1)(x+2)+(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x^2+5x}{x^2-4}\Rightarrow\frac{(x^2+3x+2)+(x^2-3x+2)}{x^2-4}=\frac{x^2+5x}{x^2-4}$$

$$\xrightarrow{x\neq\pm 2}2x^2+4=x^2+5x\Rightarrow x^2-5x+4=0\Rightarrow(x-4)(x-1)=0\Rightarrow x=1,4$$

دقت کنید هیچ‌یک از جواب‌ها مخرج را صفر نمی‌کنند، بنابراین هر دو قابل‌قبول هستند، پس مجموع ریشه‌ها ۵ است.

۲۹ گزینه ۱

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$x+\sqrt{x}+x-\sqrt{x}+2\sqrt{(x+\sqrt{x})(x-\sqrt{x})}=2\ \Rightarrow 2x+2\sqrt{x^2-x}=2$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2-x}=1-x\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}x^2-x=1+x^2-2x\Rightarrow x=1$$

چون $x=1$ در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند، آن را می‌پذیریم.

۳۰ گزینه ۱

$$\frac{۴}{۳x^۲-۵x+۲}=\frac{۳}{x^۲-۱}$$

$$\Rightarrow \frac{۴}{(x-۱)(۳x-۲)}=\frac{۳}{(x-۱)(x+۱)} \xrightarrow{x\neq -۱\,,+۱\,,\frac{۲}{۳}} ۹x^۲-۱۵x+۶=۴x^۲-۴ \Rightarrow ۵x^۲-۱۵x+۱۰=۰$$

$$\Rightarrow x^۲-۳x+۲=۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غ ق ق} \\ x=۲ & \text{ق ق} \end{cases}$$

۳۱ گزینه ۳

ابتدا با شرط $x \neq ۴$ می‌توان نوشت:

$$\frac{x-۴}{x^۲-۲x-۸}=\frac{x-۴}{(x-۴)(x+۲)}=\frac{۱}{x+۲}$$

با جایگذاری در معادله، داریم:

$$\frac{۱}{x+۲}+\frac{۳-۲x}{x+۲}=\frac{۳x+۱}{۲-x} \Rightarrow \frac{۴-۲x}{x+۲}=\frac{۳x+۱}{۲-x} \xrightarrow{x\neq \pm ۲} (۴-۲x)(۲-x)=(x+۲)(۳x+۱)$$

$$\Rightarrow ۸-۸x+۲x^۲=۳x^۲+۷x+۲ \Rightarrow x^۲+۱۵x-۶=۰ \Rightarrow x=\frac{-۱۵\pm\sqrt{۲۴۹}}{۲}$$

هر دو جواب قابل‌قبول هستند، پس معادله دارای ۲ ریشه است.

۳۲ گزینه ۲

$$(x+۱)(۲x+۵)=\sqrt{-(x+۳)(۲x+۱)}$$

$$\Rightarrow ۲x^۲+۷x+۵=\sqrt{-(۲x^۲+۷x+۳)}$$

$$\xrightarrow{۲x^۲+۷x+۳=t} t+۲=\sqrt{-t} \xrightarrow{\text{توان ۲}} t^۲+۴t+۴=-t$$

$$\Rightarrow t^۲+۵t+۴=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=-۱ & \\ t=-۴ & \text{غقق} \end{cases}$$

$$۲x^۲+۷x+۳=-۱ \Rightarrow ۲x^۲+۷x+۴=۰ \Rightarrow p=\frac{۴}{۲}=۲$$

۳۳ گزینه ۲

$$a=x^۲-۴x+۵ \Rightarrow a=\sqrt{a+۲} \xrightarrow{a>۰} a^۲=a+۲ \Rightarrow a^۲-a-۲=۰$$

$$\xrightarrow{a>۰} a=۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۵=۲ \Rightarrow x^۲-۴x+۳=۰ \Rightarrow x_۱.x_۲=۳$$

۳۴ گزینه ۳

$x=\frac{-1}{5}$ یکی از جواب‌های معادله است، پس در آن صدق می‌کند.

$$\frac{-1-3}{t+2}=\frac{1-\frac{1}{5}}{\frac{t}{5}}\Rightarrow\frac{-4}{t+2}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{t}{5}}=\frac{4}{t}$$

$$\frac{-1}{t+2}=\frac{1}{t}\Rightarrow -t=t+2\Rightarrow 2t=-2\Rightarrow t=-1$$

در معادله به‌جای t مقدار -1 را قرار می‌دهیم:

$$\frac{5x-3}{1}=\frac{1+x}{x}\Rightarrow 5x^2-3x=1+x\Rightarrow 5x^2-4x-1=0$$

مجموع ضرایب صفر است، پس یکی از ریشه‌ها $x=1$ است و دیگری هم که $x=-\frac{1}{5}$ است که مجموع آن‌ها برابر $\frac{4}{5}=1-\frac{1}{5}$ است.

۳۵ گزینه ۳

ابتدا دامنهٔ $\sqrt{x}$ ایجاد می‌کند که: $x\geq 0$.

$$\sqrt{x^2+x+2x\sqrt{x}}+\sqrt{x+1-2\sqrt{x}}=\sqrt{(x+\sqrt{x})^2}+\sqrt{(\sqrt{x}-1)^2}$$
$$=|\underbrace{x+\sqrt{x}}_{\text{مثبت است}}|+|\sqrt{x}-1|=x+\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|$$

بنابراین:

$$x+\sqrt{x}+|\sqrt{x}-1|=x+1\Rightarrow|\sqrt{x}-1|=1-\sqrt{x}$$

پس باید $\sqrt{x}-1\leq 0$ یعنی:

$$\sqrt{x}\leq 1\Rightarrow 0\leq x\leq 1$$

۳۶ گزینه ۱

$$\left(\frac{-3}{x+1}+\frac{x}{x-1}\right)\times\frac{x^2-1}{x}=2\Rightarrow\frac{-3x+3+x^2+x}{x^2-1}\times\frac{x^2-1}{x}=2$$

$$\xrightarrow{x\neq\pm1}\frac{x^2-2x+3}{x}=2\Rightarrow x^2-2x+3=2x\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow(x-1)(x-3)=0\Rightarrow\begin{cases}x=1 & \text{غ ق ق}\\ x=3 & \text{ق ق}\end{cases}$$

$$\Rightarrow k=3\Rightarrow 2k-1=5$$

۳۷ گزینه ۲

$$\frac{2x^2-1}{x(x^3+1)}=\frac{x-1}{x(x^2-1)}\xrightarrow{x\neq0,1,-1}\frac{2x^2-1}{x^3+1}=\frac{x-1}{x^2-1}$$

$$\Rightarrow\frac{2x^2-1}{(x+1)(x^2-x+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\Rightarrow\frac{2x^2-1}{x^2-x+1}=1$$

$$\Rightarrow 2x^2-1=x^2-x+1\Rightarrow x^2+x-2=0\Rightarrow(x+2)(x-1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=-2 & \text{قابل‌قبول}\\ x=1 & \text{غیرقابل‌قبول}\end{cases}$$

۳۸ گزینه ۱

$x^۲ - ۳x = A$

$$\frac{۱}{A-۲} + \frac{۱}{A+۲} = \frac{۱}{A} \Rightarrow \frac{A+۲+A-۲}{A^۲-۴} = \frac{۱}{A} \quad (A \neq ۲, -۲)$$

$$\Rightarrow \frac{۲A}{A^۲-۴} = \frac{۱}{A} \Rightarrow ۲A^۲ = A^۲ - ۴ \Rightarrow A^۲ = -۴ \quad \text{غیرقابل‌قبول}$$

بنابراین معادلهٔ موردنظر دارای جواب نیست.

۳۹ گزینه ۲

$$\frac{a}{x} + \frac{۲x-۲}{x+۱} = ۱ \Rightarrow \frac{۲x-۲}{x+۱} = ۱ - \frac{a}{x} \Rightarrow \frac{۲x-۲}{x+۱} = \frac{x-a}{x}$$

$$\xrightarrow{x \neq ۰, -۱} ۲x^۲ - ۲x = x^۲ + x - ax - a$$

$$\Rightarrow x^۲ + (a-۳)x + a = ۰ \xrightarrow[\Delta < ۰]{\text{فاقد ریشهٔ حقیقی}} (a-۳)^۲ - ۴a < ۰$$

$$\Rightarrow a^۲ - ۱۰a + ۹ < ۰ \Rightarrow ۱ < a < ۹$$

۴۰ گزینه ۲

اگر مجموع دو مقدار نامنفی برابر صفر باشد، تک‌تک عبارت‌ها برابر صفرند:

$$x^۲ - ۵x + ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۴ \end{cases}$$

فقط $x = ۱$ عبارت $۴x^۳ - ۲x - ۲$ را صفر می‌کند، پس معادلهٔ صورت سؤال فقط یک جواب دارد.

۴۱ گزینه ۴

$$\frac{۱}{a} - \frac{۱}{a+x} = \frac{۱}{a+۴x} \xrightarrow{a(a+x)(a+۴x)} (a+x)(a+۴x) - a(a+۴x) = a(a+x)$$

$$\Rightarrow a^۲ + ۵ax + ۴x^۲ - a^۲ - ۴ax = a^۲ + ax \Rightarrow a^۲ = ۴x^۲ \Rightarrow (\frac{a}{x})^۲ = ۴ \Rightarrow \frac{a}{x} = \pm ۲$$

باتوجه‌به گزینه‌ها، مقدار ۲ برای نسبت $\frac{a}{x}$ قابل قبول است.

۴۲ گزینه ۳

$$\frac{x-۲}{x+۲}-\frac{x+۲}{x-۲}=\frac{x^۲-۴x+۴-x^۲-۴x-۴}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{-۸x}{(x+۲)(x-۲)}$$

$$۸x(\frac{x+۲}{x-۲}-۱)=۸x(\frac{x+۲-x+۲}{x-۲})=\frac{۳۲x}{x-۲}\Rightarrow\frac{-۸x}{(x+۲)(x-۲)}=\frac{۳۲x}{(x-۲)}\Rightarrow ۳۲x(x+۲)(x-۲)+۸x(x-۲)=۰$$

$$\Rightarrow x(x-۲)(۳۲(x+۲)+۸)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x-۲=۰\Rightarrow x=۲ \quad \text{غ ق ق}\\ ۳۲(x+۲)+۸=۰\Rightarrow x=\frac{-۹}{۴}\end{cases}$$

$$\text{مجموع ریشه‌ها}: ۰+(\frac{-۹}{۴})=\frac{-۹}{۴}$$

۴۳ گزینه ۴

نکته: اگر در مراحل حل یک معادله به یک عبارت همواره درست برسیم، کل دامنه، جواب معادله خواهد بود.

$$\sqrt{x+\sqrt{x^۲-۱}}+\sqrt{x-\sqrt{x^۲-۱}}=\sqrt{۲x+۲}\xrightarrow[\text{به توان ۲}]{\text{طرفین}}x+\cancel{\sqrt{x^۲-۱}}+x-\cancel{\sqrt{x^۲-۱}}+۲\sqrt{x^۲-x^۲+۱}=۲x+۲$$

$$\Rightarrow ۲x+۲=۲x+۲\Rightarrow \quad \text{همواره برقرار است}$$

بنابراین مطابق نکته، کل دامنه $(x\geq ۱)$ جواب این معادله خواهد بود درنتیجه معادله بی‌شمار جواب دارد.

۴۴ گزینه ۲

معادله‌های $\frac{۳x+۶}{x+۲}=۲$ و $\frac{x-۲}{x-۱}=\frac{x+۱}{x+۲}$ جواب ندارند.

معادلهٔ $\frac{۱}{۴}=\frac{x+۳}{۴x+۱۲}$ دارای بی‌شمار جواب به‌صورت $\mathbb{R}-\{-۳\}$ است؛ زیرا:

$$\frac{x+۳}{۴(x+۳)}=\frac{۱}{۴}\ ,\ (x\neq -۳)$$

معادلهٔ $\frac{x-۳}{(x-۳)(x+۳)}=\frac{۳x}{x(x+۱)}$ را ابتدا با شرط $x\neq ۰,۳$، به‌صورت $\frac{۱}{x+۳}=\frac{۳}{x+۱}$ می‌نویسیم. اکنون به‌سادگی می‌توان فهمید این معادله دارای یک جواب است، زیرا:

$$۳(x+۳)=x+۱\Rightarrow ۳x+۹=x+۱\Rightarrow x=-۴$$

۴۵ گزینه ۲

ابتدا در معادلهٔ داده‌شده به جای x، مقدار (-۲) را قرار می‌دهیم:

$$\frac{۲(-۲)-۱}{t+۷}+\frac{۳-۲(-۲)}{۲t-۳}=-۲ \Rightarrow \frac{-۵}{t+۷}+\frac{۷}{۲t-۳}=-۲$$

$$\Rightarrow \frac{-۵}{t+۷}+\frac{۷}{۲t-۳}+۲=۰ \qquad (t \neq -۷, \frac{۳}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{-۵(۲t-۳)+۷(t+۷)+۲(t+۷)(۲t-۳)}{(t+۷)(۲t-۳)}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{-۱۰t+۱۵+۷t+۴۹+۴t^۲+۲۲t-۴۲}{(t+۷)(۲t-۳)}=۰ \Rightarrow \frac{۴t^۲+۱۹t+۲۲}{(t+۷)(۲t-۳)}=۰ \Rightarrow ۴t^۲+۱۹t+۲۲=۰ \Rightarrow \Delta=۳۶۱-۳۵۲=۹$$

$$\Rightarrow t=\frac{-۱۹\pm\sqrt{۹}}{۲(۴)} \Rightarrow \begin{cases} t_۱=\frac{-۱۹+۳}{۸}=\frac{-۱۶}{۸}=-۲ \\ t_۲=\frac{-۱۹-۳}{۸}=\frac{-۲۲}{۸}=\frac{-۱۱}{۴} \end{cases}$$

چون عدد (-۲) صحیح است و عبارات $t+۷$ و $۲t-۳$ به ازای (-۲) صفر نمی‌شوند، پس قابل‌قبول است.

۴۶ گزینه ۳

$$\frac{۳}{۳+\sqrt{x}}=\frac{۵}{۳\sqrt{x}+x} \Rightarrow \frac{۳}{x+\sqrt{x}}=\frac{۵}{\sqrt{x}(۳+\sqrt{x})} \Rightarrow ۳\sqrt{x}(۳+\sqrt{x})=۵(۳+\sqrt{x})$$

$$\xrightarrow{۳+\sqrt{x}\neq ۰} ۳\sqrt{x}=۵ \Rightarrow \sqrt{x}=\frac{۵}{۳} \Rightarrow x=\frac{۲۵}{۹}$$

۴۷ گزینه ۴

$$\frac{۲x+۳}{۲x-۲}-\frac{۵}{x^۲-۱}-\frac{۲x-۳}{۲x+۲}=۰ \Rightarrow \frac{(۲x+۳)(x+۱)-۱۰-(۲x-۳)(x-۱)}{۲(x-۱)(x+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۲x^۲+۲x+۳x+۳-۱۰-۲x^۲+۲x+۳x-۳}{۲(x-۱)(x+۱)}=۰$$

$$\Rightarrow \frac{۱۰x-۱۰}{۲(x-۱)(x+۱)}=۰ \Rightarrow ۱۰x-۱۰=۰ \Rightarrow x=۱$$

اما $x=۱$ در دامنهٔ معادله قرار ندارد، درنتیجه معادله جواب حقیقی ندارد.

۴۸ گزینه ۲

طرفین معادله را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$\sqrt{x+۳}-x=۱+۱-x+۲\sqrt{۱-x} \Rightarrow \sqrt{x+۳}=۲+۲\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow x+۳=۴+۴-۴x+۸\sqrt{۱-x} \Rightarrow ۵x-۵=۸\sqrt{۱-x}$$
$$\Rightarrow ۲۵x^۲-۵۰x+۲۵=۶۴-۶۴x \Rightarrow ۲۵x^۲+۱۴x-۳۹=۰$$
$$\xrightarrow{\text{مجموع ضرایب صفر است}} \begin{cases} x=۱ \\ x=-\frac{۳۹}{۲۵} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

جواب $x=-\frac{۳۹}{۲۵}$ در معادله صدق نمی‌کند و معادله دارای یک جواب $x=۱$ است.

۴۹ گزینه ۳

$$\text{نمک اولیه } \frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰=۸$$

اگر میزان نمک اضافه‌شده را با x نمایش دهیم، داریم:

$$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} \frac{۸+x}{۲۰۰-۱۲+x}=\frac{۱۰}{۱۰۰} \Rightarrow \frac{۸+x}{۱۸۸+x}=\frac{۱}{۱۰} \Rightarrow ۸۰+۱۰x=۱۸۸+x \Rightarrow ۹x=۱۰۸ \Rightarrow x=۱۲$$

بنابراین برای به دست آوردن محلول با غلظت ۱۰% باید ۱۲ کیلوگرم نمک اضافه کنیم.

۵۰ گزینه ۱

$$x-\sqrt[۳]{x^۳-x^۲}=\frac{۱}{۳} \Rightarrow \sqrt[۳]{x^۳-x^۲}=x-\frac{۱}{۳}$$
$$\Rightarrow x^۳-x^۲=x^۳-x^۲+\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۲۷} \Rightarrow x=\frac{۱}{۹}$$

۵۱ گزینه ۲

$$\sqrt{۲+\frac{۱}{x}}=a \Rightarrow \sqrt{\frac{۲x+۱}{x}}=a \Rightarrow \sqrt{\frac{x}{۲x+۱}}=\frac{۱}{a}\ ,\ (a\neq ۰)$$
$$۹(\frac{۱}{a})+a=۶ \Rightarrow ۹+a^۲=۶a$$
$$\Rightarrow a^۲-۶a+۹=۰ \Rightarrow (a-۳)^۲=۰$$
$$\Rightarrow a=۳ \Rightarrow \sqrt{۲+\frac{۱}{x}}=۳ \Rightarrow ۲+\frac{۱}{x}=۹ \Rightarrow x=\frac{۱}{۷}$$

$x=\frac{۱}{۷}$ در معادله صدق می‌کند.

۵۲ گزینه ۲

صورت و مخرج طرف چپ معادله را بر x تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۱}{x+۱+\frac{۳}{x}}+\frac{۱}{x-۵+\frac{۳}{x}}=۱$$

$x+\frac{۳}{x}$ را t فرض می‌کنیم:

$$\frac{۱}{t+۱}+\frac{۱}{t-۵}=۱\xrightarrow{\times(t+۱)(t-۵)}t-۵+t+۱=t^{۲}-۴t-۵$$

$$\Rightarrow t^{۲}-۶t-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}t_{۱}=۳+\sqrt{۱۰}\Rightarrow x+\dfrac{۳}{x}=۳+\sqrt{۱۰}\\ t_{۲}=۳-\sqrt{۱۰}\Rightarrow x+\dfrac{۳}{x}=۳-\sqrt{۱۰}\end{cases}$$

$\Rightarrow x^{۲}+۳=(۳+\sqrt{۱۰})x\Rightarrow\Delta>۰\Rightarrow$ دو ریشه

$\Rightarrow x^{۲}+۳=(۳-\sqrt{۱۰})x\Rightarrow\Delta<۰$ ریشه ندارد

۵۳ گزینه ۲

اگر $\sqrt{x-۳}=t$ باشد، در این صورت $x=t^{۲}+۳$ و معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$t+\sqrt{t^{۲}+۳+۹t}=۷\Rightarrow\sqrt{t^{۲}+۹t+۳}=۷-t$$
$$\Rightarrow t^{۲}+۹t+۳=t^{۲}-۱۴t+۴۹$$
$$\Rightarrow ۲۳t=۴۶\Rightarrow t=۲$$
$$\Rightarrow\sqrt{x-۳}=۲\Rightarrow x-۳=۴\Rightarrow x=۷$$

۵۴ گزینه ۱

نکته: فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_{۱},y_{۱})$ و $B(x_{۲},y_{۲})$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_{۲}-x_{۱})^{۲}+(y_{۲}-y_{۱})^{۲}}$$

نکته: برای حل یک معادلهٔ رادیکالی، ابتدا با توان‌رسانی، رادیکال(ها) را حذف می‌کنیم، سپس معادلهٔ حاصل را حل می‌نماییم. در پایان قابل‌قبول بودن هریک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

نقطهٔ A روی خط $y=x-۳$ واقع است، پس مختصات آن را به‌صورت $A(a,a-۳)$ در نظر می‌گیریم. طبق فرض فاصلهٔ این نقطه از نقطهٔ $B(-۳,۱)$ برابر با ۵ است، پس:

$$AB=\sqrt{(a+۳)^{۲}+(a-۴)^{۲}}=۵\xrightarrow{\text{به توان ۲}}a^{۲}+۶a+۹+a^{۲}-۸a+۱۶=۲۵$$

$$\Rightarrow ۲a^{۲}-۲a+۲۵=۲۵\Rightarrow ۲a^{۲}-۲a=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۰\Rightarrow A(۰,-۳)\ \ \times\\ a=۱\Rightarrow A(۱,-۲)\ \ \checkmark\end{cases}$$

طبق فرض نقطهٔ A در ناحیهٔ چهارم قرار دارد، پس طول آن مثبت و عرض آن منفی است؛ بنابراین تنها $A(۱,-۲)$ قابل‌قبول است که مجموع طول و عرض آن برابر با -۱ است.

۵۵ گزینه ۱

نکته: برای حل یک معادلهٔ گویا، ابتدا با ضرب دو طرف تساوی در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها، معادله را از شکل کسری درمی‌آوریم و سپس معادلهٔ حاصل را حل می‌کنیم. در پایان قابل‌قبول بودن هریک از جواب‌ها را بررسی می‌کنیم.

اگر عدد موردنظر را x بنامیم، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{۲}+\frac{۲}{x}=\frac{۱۰}{۳}\Rightarrow\frac{x^۲+۴}{۲x}=\frac{۱۰}{۳}\xrightarrow{\times ۶x}۳x^۲+۱۲=۲۰x\Rightarrow ۳x^۲-۲۰x+۱۲=۰$$
$$\Rightarrow x=\frac{۲۰\pm\sqrt{۴۰۰-۱۴۴}}{۶}=\frac{۲۰\pm\sqrt{۲۵۶}}{۶}=\frac{۲۰\pm ۱۶}{۶}\Rightarrow\begin{cases}x=۶\in\mathbb{N}\\ x=\frac{۲}{۳}\notin\mathbb{N}\end{cases}$$

بنابراین تنها یک عدد طبیعی در شرط موردنظر صدق می‌کند.

۵۶ گزینه ۲

ابتدا طرفین تساوی را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sqrt{x-۴})^۲=(x-۶)^۲\Rightarrow x-۴=x^۲-۱۲x+۳۶$$
$$\Rightarrow x^۲-۱۳x+۴۰=۰$$
$$\Rightarrow (x-۵)(x-۸)=۰\Rightarrow x=۵ \text{ یا } x=۸$$

اما در حل این مسئله برای به دست آوردن دامنهٔ تعریف داریم:

$$\begin{cases}x-۴\geq ۰\Rightarrow x\geq ۴\\ x-۶\geq ۰\Rightarrow x\geq ۶\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}}x\geq ۶$$

بنابراین $x=۵$ غیرقابل‌قبول بوده و تنها جواب مسئله $x=۸$ است.

۵۷ گزینه ۳

تعریف می‌کنیم:

x: مدت‌زمان انجام کار توسط ماشین B

V: حجم کار

درنتیجه:

$\frac{V}{x-۱۵}$: میزان کار ماشین A در یک ساعت

$\frac{V}{x}$: میزان کار ماشین B در یک ساعت

$\frac{V}{۱۸}$: میزان کار هر دو ماشین باهم در یک ساعت

$$\Rightarrow\frac{V}{x}+\frac{V}{x-۱۵}=\frac{V}{۱۸}$$
$$\Rightarrow\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow ۱۸x(x-۱۵)\left[\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۱۵}=\frac{۱}{۱۸}\right]$$
$$\Rightarrow x^۲-۵۱x+۲۷۰=۰$$

$$\Rightarrow (x-۴۵)(x-۶)=۰\Rightarrow\begin{cases}x=۶ \quad \text{غ.ق.ق}\\ x=۴۵\end{cases}$$

مدت‌زمان انجام کار توسط ماشین A $=۴۵-۱۵=۳۰$

۵۸ گزینه ۳

اگر جمع چند عبارت همواره نامنفی برابر با صفر شود، همهٔ آن‌ها لزوماً برابر با صفرند؛ بنابراین جواب‌های معادله از اشتراک ریشه‌های عبارات به دست می‌آید. لذا داریم:

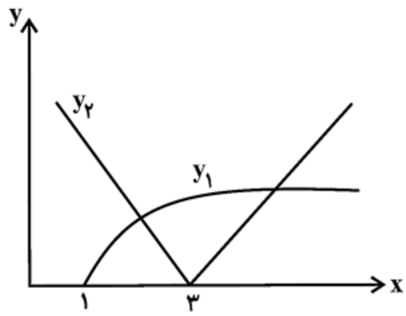
$$x^۲ - ۳x + ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x-۲) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = ۲$$
$$x^۲ + x - ۲ = ۰ \Rightarrow (x-۱)(x+۲) = ۰ \Rightarrow x = ۱ \text{ یا } x = -۲$$

که جواب مشترک $x = ۱$ است؛ بنابراین معادله یک جواب دارد.

۵۹ گزینه ۲

$$|x-۳| - \sqrt{x-۱} = ۰ \Rightarrow |x-۳| = \sqrt{x-۱} \qquad (۱)$$

باتوجه‌به $\sqrt{x-۱}$، باید $x \geq ۱$ باشد. دو تابع $y_۱ = \sqrt{x-۱}$ و $y_۲ = |x-۳|$ را در نظر می‌گیریم و نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم:



نمودار دو تابع $y_۱$ و $y_۲$ در دو نقطه متقاطع هستند. درنتیجه معادلهٔ (۱) دو جواب دارد.

۶۰ گزینه ۲

$$\xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} \frac{۵(x-۲)-۴}{x(x-۲)} = \frac{x-۴}{x-۲}$$
$$\xrightarrow{x\neq ۲} \frac{۵x-۱۰-۴}{x} = x-۴$$
$$\Rightarrow ۵x - ۱۴ = x^۲ - ۴x \Rightarrow x^۲ - ۹x + ۱۴ = ۰$$

$$\Rightarrow (x-۷)(x-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ & \text{غ.ق.ق} \\ x = ۷ \end{cases}$$

معادله دارای تک جواب $x = ۷$ است.

۶۱ گزینه ۴

$$\frac{۲}{x^۲-۱} = -k \Rightarrow x^۲ - ۱ = \frac{-۲}{k} \Rightarrow x^۲ = \frac{-۲}{k} + ۱$$

چون $x^۲ \geq ۰$ است، پس باید $\frac{-۲}{k} + ۱ \geq ۰$ باشد:

$$\frac{-۲}{k} + ۱ \geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲+k}{k} \geq ۰ \Rightarrow k < ۰ \text{ یا } k \geq ۲ \Rightarrow k \in \mathbb{R} - [۰, ۲)$$